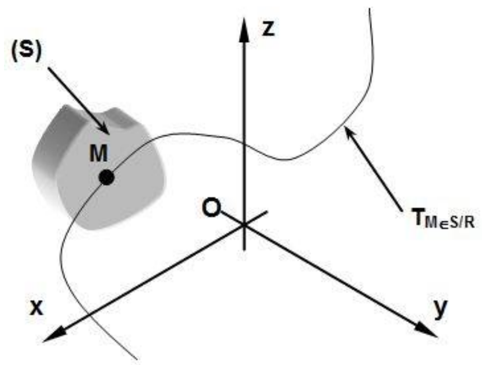
Points du programme	▪ **S2-2 - Comportement d'un mécanisme et/ou d'une pièce :** Mouvements des mécanismes : trajectoires, vitesses, accélérations, mouvements plans.	Séquence 6

Objectifs	Pré requis
• Définir un mouvement par son équation. • Déterminer analytiquement les vitesses et les accélérations d'un point. • Reconnaître un mouvement uniforme et uniformément varié.	• Séquence de première - Concept de mouvement. • Notions de mathématiques : coordonnées de vecteurs, résolution d'équation et dérivation d'une fonction.

1 - Introduction

1.1 - Abscisse curviligne



L'abscisse curviligne du point M ∈ S sur $T_{M\in S/R}$ est la mesure algébrique, en un instant t, de l'arc AM. A étant l'origine du mouvement. Cette longueur d'arc varie en fonction du temps.

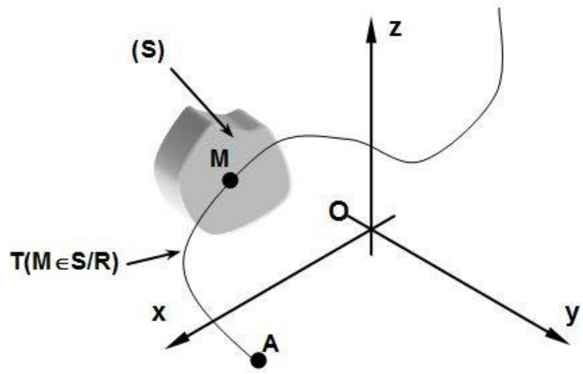
NOTATION :

1.2 - Vitesse instantanée

Soit le point M appartenant au solide S en mouvement dans le repère R suivant la trajectoire $T_{M\in S/R}$. Le point A est l'origine du mouvement.

A un instant t, parfaitement défini, l'abscisse curviligne est fonction du temps, soit x = f(t).

La vitesse est définie par :



1.3 - Accélération

Soit deux points M_1 et M_2 qui ont pour vitesse respective $\overrightarrow{V_{M1\in S/R}}$ et $\overrightarrow{V_{M2\in S/R}}$.

ΔV est la variation de la vitesse du point M entre les instants t1 et t2.

Donc ΔV =

Accélération moyenne =

Accélération instantanée =

Vecteur accélération

Si $\overrightarrow{\mathrm{OM}}\ \begin{vmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{vmatrix}_{\mathrm{R}}$ alors $\overrightarrow{\mathrm{V}_{\mathrm{M}\in\mathrm{S/R}}}\ \begin{vmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{vmatrix}_{\mathrm{R}}$ et (Γ : Gamma majuscule)

Avec $\left\|\overrightarrow{\Gamma_{\mathrm{M}\in\mathrm{S/R}}}\right\|$= Unité :

Le vecteur accélération $\overrightarrow{\Gamma_{\mathrm{M}\in\mathrm{S/R}}}$ se décompose en deux vecteurs unitaires.

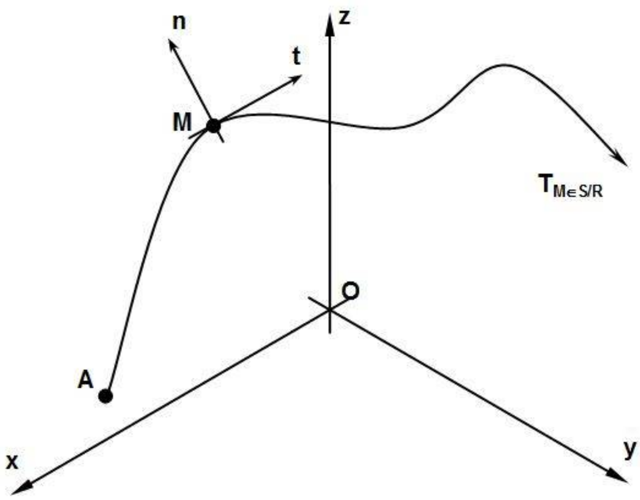
- Composante tangentielle
- Composante normale.

Soit le point M appartenant à un solide S qui se déplace dans le repère R (O, $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$) suivant la trajectoire $T_{M\in S/R}$.

Définissons un repère local (M, $\vec{t}$, $\vec{n}$) lié au point M.

(M, $\vec{t}$) tangent à la trajectoire et dans le sens du déplacement.

(M, $\vec{n}$) normal à la trajectoire et orienté vers l'extérieure de la trajectoire.



L'accélération totale $\overrightarrow{\Gamma_{\mathrm{M}\in\mathrm{S/R}}}$ se décompose en

-
-

soit $\overrightarrow{\Gamma_{\mathrm{M}\in\mathrm{S/R}}}$ =

avec

Remarques sur les valeurs possibles de γ_t et γ_n :

Mouvement de translation :

Mouvement de rotation :

2 - Analyse de mouvements

2.1 - Mouvement 1

Soit le point M d'un solide (S) dont le mouvement est défini par le vecteur position suivant :

$$\overrightarrow{OM}\begin{vmatrix} x = 3t + 1 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{vmatrix}_R \quad \text{dans le repère R (O, } \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\text{). Unités : millimètres et secondes.}$$

Question 1 - Définir les composantes du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ aux instants t=0 à t=5 sec, par incrément d'une seconde.

Question 2 - Tracer, sur le repère figure 1, les positions du point M aux mêmes instants (M_0 à M_5).

Question 3 - Quelle est la trajectoire du point M.

Question 4 - Compléter, sur la figure 2, le graphe de la position du point M par rapport au temps.

Question 5 - Montrer que le mouvement est uniforme.

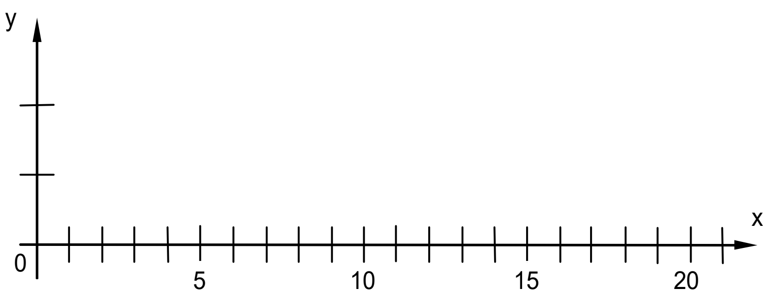


figure 1 : trajectoire du point M

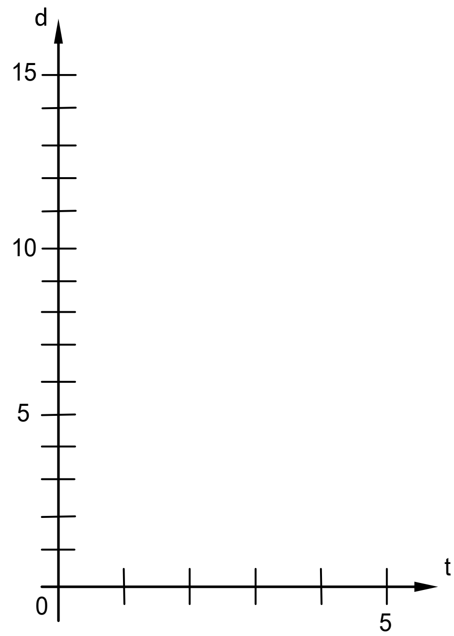


figure 2 : graphe des positions

2.2 - Mouvement 2

Soit le point M d'un solide (S) dont le mouvement est défini par le vecteur position suivant :

$$\overrightarrow{OM}\begin{vmatrix} x = 3t^2 + 1 \\ y = t^2 - 1 \\ z = 0 \end{vmatrix}_R \quad \text{dans le repère R (O, } \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\text{). Unités : millimètres et secondes.}$$

Question 1 - Définir, en complétant le tableau, les composantes du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ aux instants t=0 à t=2 sec, par incrément de 0,5 secondes.

Question 2 - Tracer, sur le repère figure 1, les positions du point M aux mêmes instants.

Question 3 - Quelle est la trajectoire du point M.

Question 4 - Quelle est la distance parcourue entre t = 0 et t = 2 sec.

Question 5 - Tracer, sur la figure 2, le graphe de la position par rapport au temps.

Question 6 - Définir les composantes du vecteur vitesse du point M ainsi que sa norme aux mêmes instants.

Question 7 - Tracer, sur la figure 3, le graphe de la vitesse par rapport au temps.

Question 8 - Définir les composantes du vecteur accélération du point M aux mêmes instants.

Question 9 - Tracer, sur la figure 4, le graphe de l'accélération par rapport au temps.

Question 10 - De quelles formes sont les courbes obtenues sur les trois graphes. Définir leurs équations algébriques.

t	$\overrightarrow{OM}$	$\overrightarrow{V_{M\in S/R}}$	$\|\overrightarrow{V_{M\in S/R}}\|$	$\overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R}}$
0	R	R		R
0,5	R	R		R
1	R	R		R
1,5	R	R		R
2	R	R		R

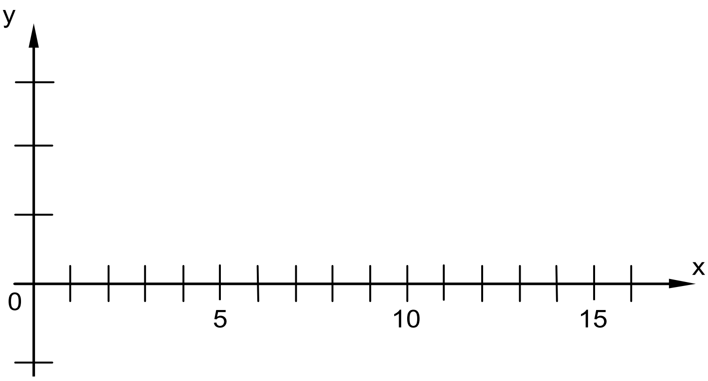


figure 1 : trajectoire du point M

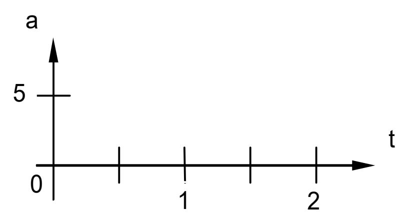


figure 4 : graphe des accélérations

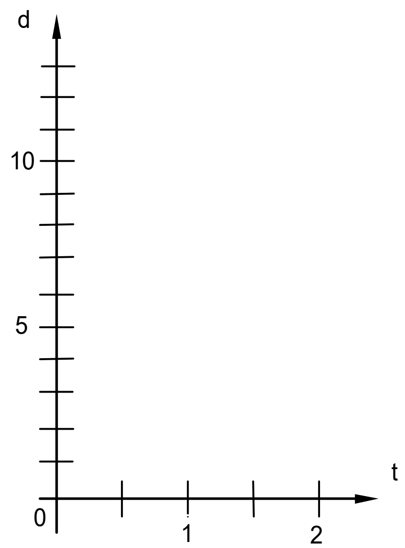


figure 2 : graphe des positions

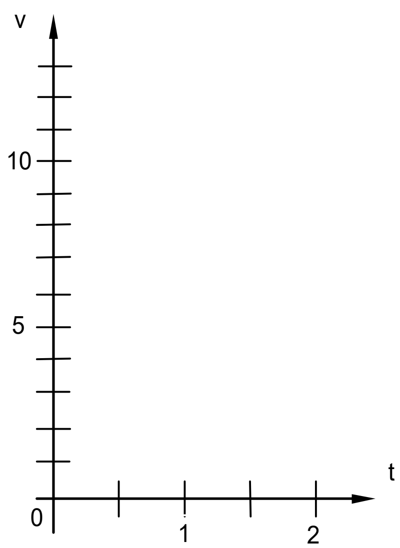


figure 3 : graphe des vitesses

2.3 - Mouvement 3

Soit le point M d'un solide (S) dont le mouvement est défini par le vecteur position suivant :

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}\ \left|\begin{array}{l} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \\ z = 0 \end{array}\right._{\mathrm{R}}$$ dans le repère R (O, $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$). Unités : millimètres et secondes.

Question 1 - Définir, en complétant le tableau, les composantes et la norme du vecteur position $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ aux différents instants.

Question 2 - Tracer, sur le repère, les positions du point M aux mêmes instants.

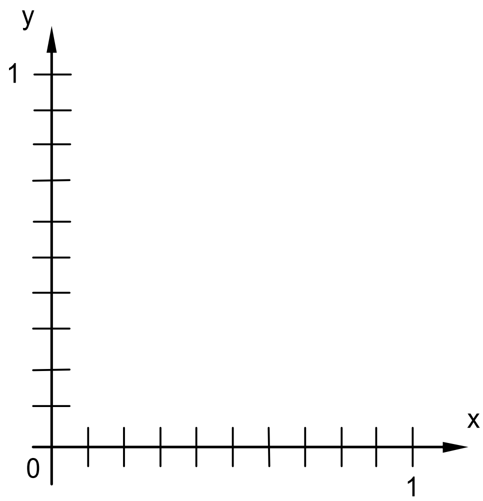
Question 3 - Quelle est la trajectoire du point M.

Question 4 - Définir, en complétant le tableau, les composantes du vecteur vitesse et la norme, aux mêmes instants.

Question 5 - Tracer les vecteurs vitesse. Que remarque-t-on ?

Question 6 - Définir les composantes du vecteur accélération et la norme, aux mêmes instants.

Question 7 - Tracer les vecteurs accélération. Que remarque-t-on ?



t	$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$	$\lVert\overrightarrow{\mathrm{OM}}\rVert$	$\overrightarrow{V_{M\in S/R}}$	$\lVert\overrightarrow{V_{M\in S/R}}\rVert$	$\overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R}}$	$\lVert\overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R}}\rVert$
0	R		R		R	
$\frac{\pi}{8}$	R		R		R	
$\frac{\pi}{4}$	R		R		R	
$\frac{3\pi}{8}$	R		R		R	
$\frac{\pi}{2}$	R		R		R	

2.4 - Mouvement 4

Le mouvement d'un point M appartenant à un solide S est défini par le vecteur position :

$$\overrightarrow{OM}\ \begin{vmatrix} x = t + 1 \\ y = \frac{1}{2}t^2 + 2 \\ z = 0 \end{vmatrix}_R$$ dans le repère R (O, $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$).

Question 1 - Déterminer l'équation de la trajectoire de M dans le repère R.

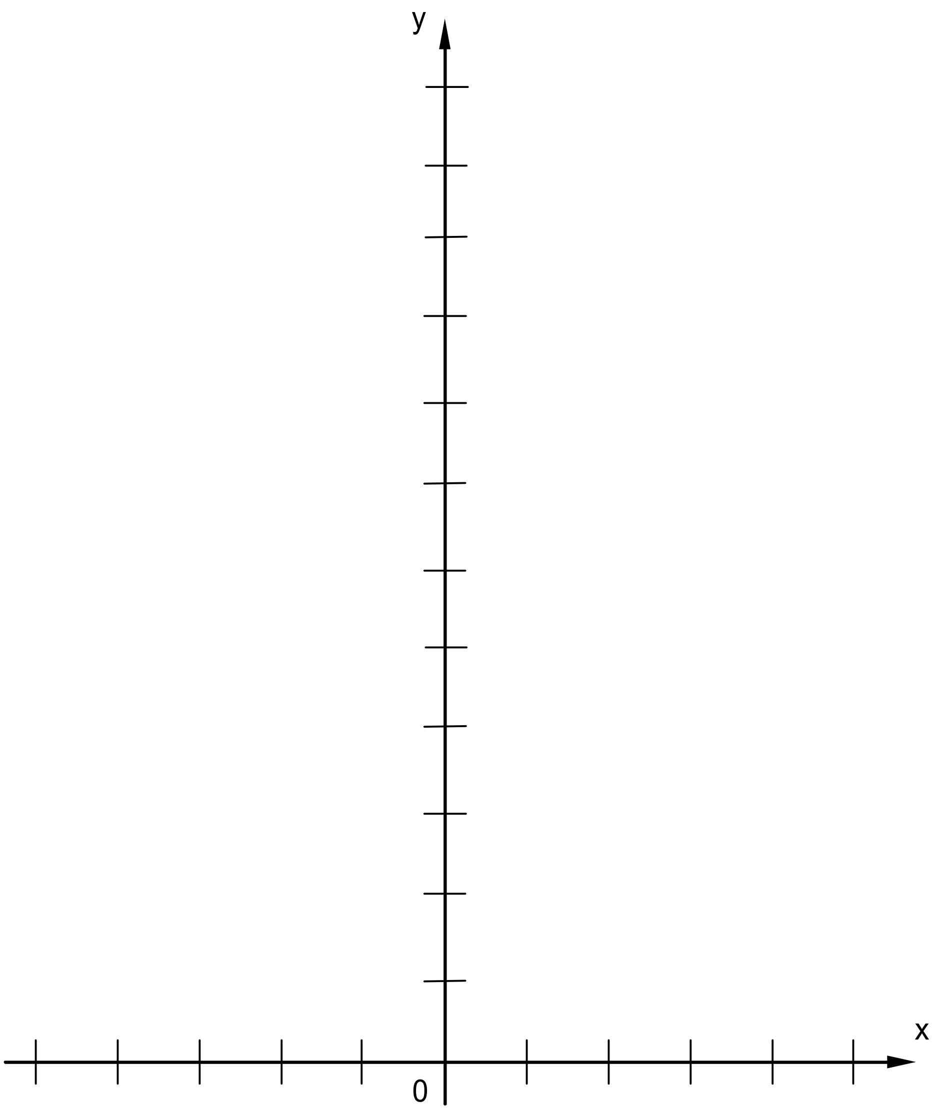
Question 2 - Tracer sur le repère la trajectoire du point M.

Question 3 - Déterminer la vitesse de ce point aux instants t = -2, t = 0 et t = 3 secondes.

Question 4 - Reporter sur la trajectoire ces vecteurs vitesse.

Question 5 - Déterminer l'accélération aux mêmes instants.

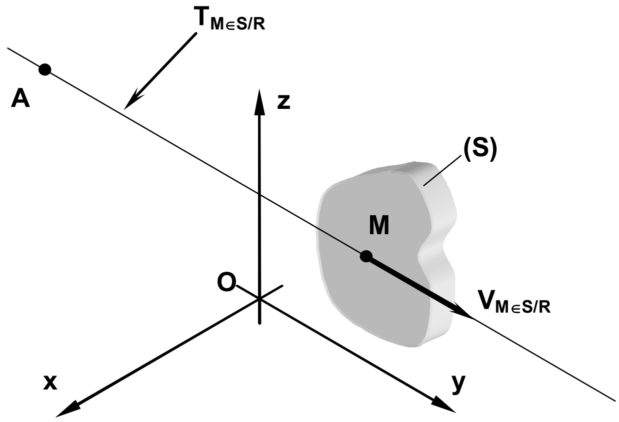
Question 6 - Reporter sur la trajectoire ces vecteurs accélération.



3 - Mouvement Rectiligne Uniforme (MRU)

Le solide S se déplace suivant une trajectoire rectiligne (A,$\vec{y}$).

Il y a déplacement donc $\overrightarrow{V_{M\in S/R}} \neq 0$.



MRU si :

Caractéristiques :

Equation horaire (ou de l'abscisse curviligne)

Les vecteurs :

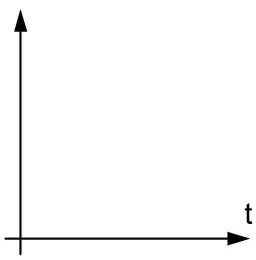
Vecteur position : $\overrightarrow{OM} = (v.t + x_0).\vec{y}$

Vecteur vitesse : $\overrightarrow{V_{M\in S/R}} = v.\vec{y}$

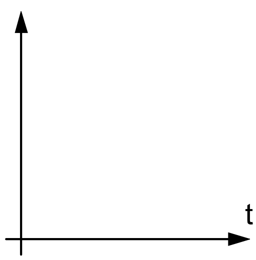
Vecteur accélération : $\overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R}} = 0$

Graphiquement :

Graphe des espaces



Graphe des vitesses



Applications

Mouvement 1

Dans un repère R (O, $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$), la position d'un point d'un solide est défini par le vecteur position $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ tel que :

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}\ {}_{\mathrm{R}}\left|\begin{array}{l} x = 2t \\ y = 3t - 5 \\ z = 0 \end{array}\right.$$

Unités : secondes et mètres.

Question 1.1 - Effectuer une première remarque sur ce mouvement.

Question 1.2 - Déterminer les positions de M∈S aux instants t = 0, 3 et 5. Tracer la trajectoire de ce point.

Question 1.3 - Déterminer l'équation de la trajectoire.

Question 1.4 - Déterminer la distance parcourue durant ces 5 secondes.

Question 1.5 - Déterminer la vitesse de M∈S.

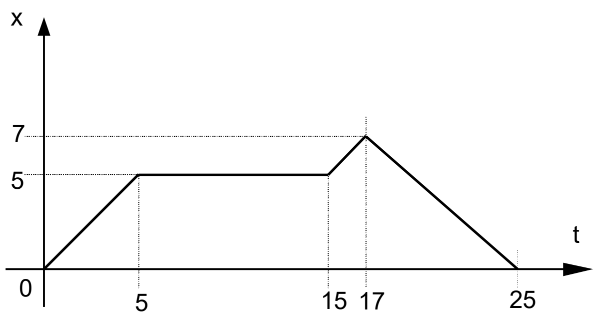
Question 1.6 - Ecrire l'équation horaire du mouvement.

Mouvement 2

Le mouvement d'une liaison glissière est défini par le graphe des espaces ci-contre.

Question 2.1 - Effectuer l'analyse des 4 phases de ce mouvement en spécifiant les instants et le mouvement de cet élément.

Question 2.2 - Déterminer les équations (espace et vitesse) de chaque phase. Les équations seront exprimées par rapport au repère absolu c'est à dire à t=0.



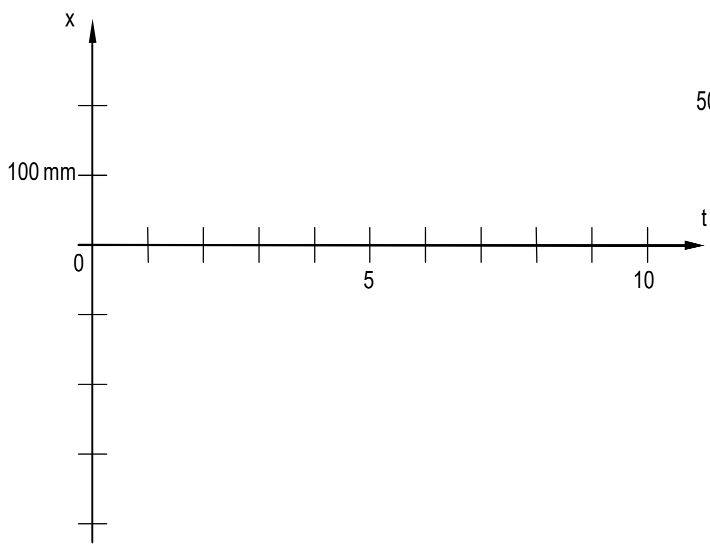
Mouvement 3

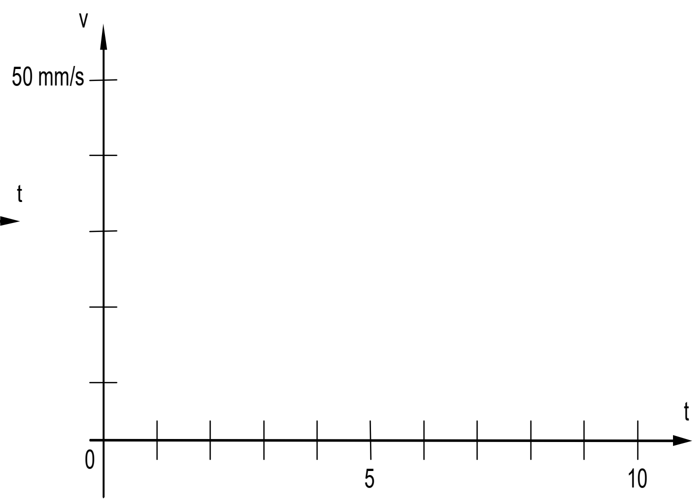
Un chariot de machine-outil a un mouvement rectiligne uniforme dont la position est définie aux instants suivants :

- à t = 8 s, x = 50 mm
- à t = 5 s, x = -100 mm

Question 3.1 - Déterminer l'équation horaire de ce mouvement.

Question 3.2 - Etablir les graphes des espaces et de la vitesse en fonction du temps.



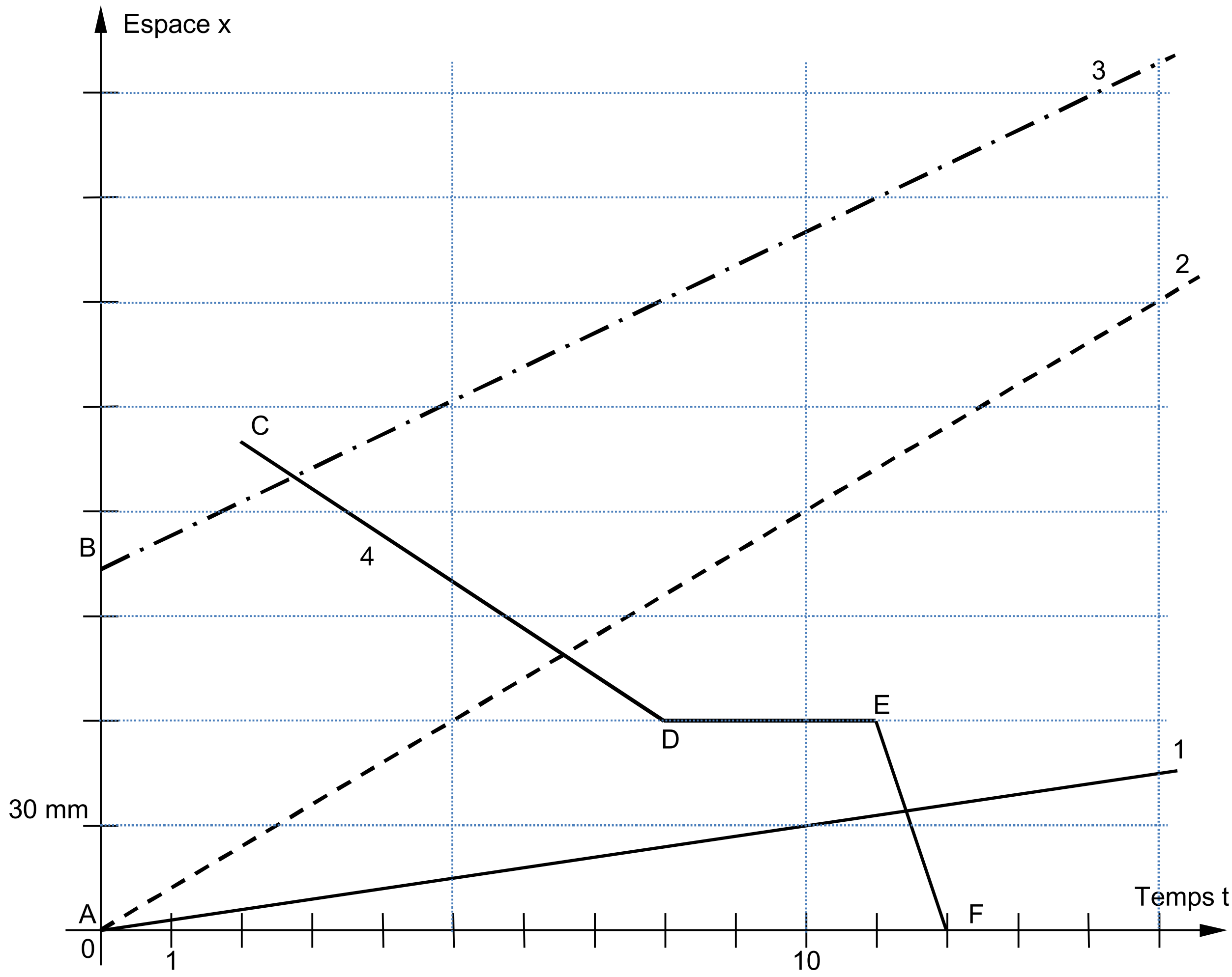


Question 3.3 - A partir des graphes, déduire l'espace parcouru à t = 10 secondes.

Mouvement 4

Objectif : déterminer les caractéristiques d'un mouvement en fonction du graphe des positions.

Le mouvement de quatre solides est défini par le graphe suivant :



Question 4.1 - Lequel des deux mouvements 1 ou 2 est le plus rapide ? Pourquoi ?

Question 4.2 - A partir du graphique, écrire les équations horaires de chaque de ces deux mouvements.

Question 4.3 - Quelle est la particularité du mouvement 3. Ecrire son équation horaire.

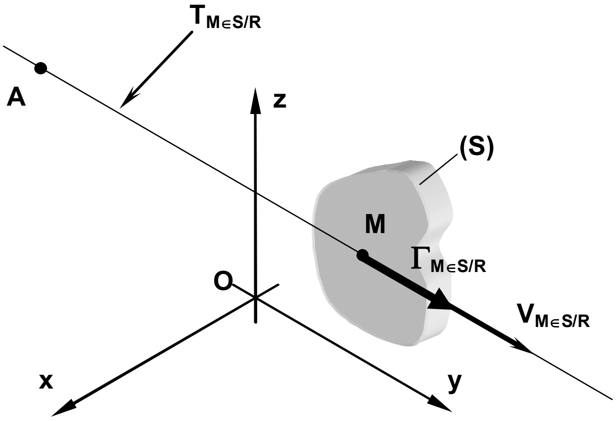
Question 4.4 - Quelle est la particularité du mouvement 4. Ecrire son équation horaire.

Question 4.5 - Déterminer graphiquement puis par le calcul l'instant et la position de l'intersection des mouvements 2 et 4.

4 - Mouvement Rectiligne Uniformément Varié (MRUV)

Le solide S se déplace suivant une trajectoire rectiligne (A,$\vec{y}$).

Il y a déplacement donc $\overrightarrow{V_{M\in S/R}} \neq 0$.



MRUV si :

Caractéristiques :

Equation horaire (ou de l'abscisse curviligne)	Equation de vitesse

Les vecteurs :

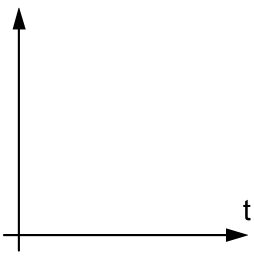
Vecteur position : $\overrightarrow{OM} = \left(\frac{1}{2}\gamma_t.t^2 + v_0.t + x_0\right).\vec{y}$

Vecteur vitesse : $\overrightarrow{V_{M\in S/R}} = (\gamma_t.t + v_0).\vec{y}$

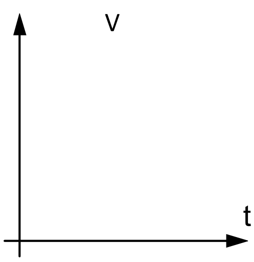
Vecteur accélération : $\overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R}} = \gamma_t.\vec{y}$

Graphiquement :

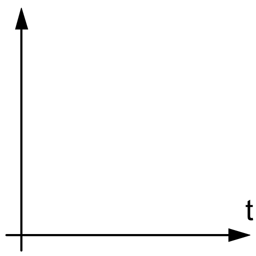
Graphe des espaces



Graphe des vitesses

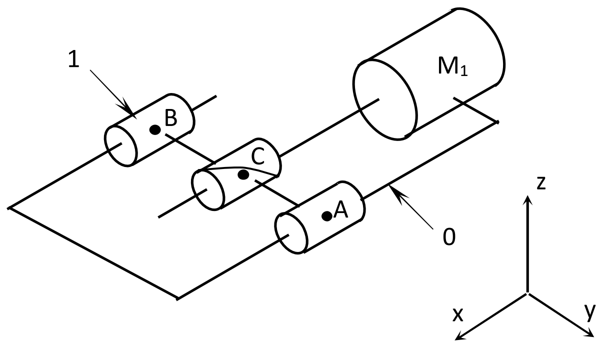


Graphe des accélérations



Imprimante 3D

Le schéma ci-contre représente l'axe x d'une imprimante 3D. L'axe des y est identique et placé en dessous. Le chariot 1, porteur de la buse déposant l'ABS, est déplacé en translation grâce au moteur M_1 par l'intermédiaire de la liaison hélicoïdale. Le guidage est assuré par deux pivots glissants parallèles.



1 - Etude de la première phase.

Dans la première phase du mouvement de 1 par rapport à 0 pour 0 < t < 2, l'équation de mouvement est définie par :

$$x = 16\,t^2 + 50.$$

Question 1 - Déterminer la position de B aux instants t = 0, t = 1 et t = 2 secondes.

Question 2 - Déterminer les composantes du vecteur vitesse $\overrightarrow{V_{B\in 1/0}}$ et sa norme aux mêmes instants.

Question 3 - Déterminer les composantes du vecteur accélération $\overrightarrow{\Gamma_{B\in 1/0}}$ et sa norme aux mêmes instants.

Question 4 - Ecrire les équations horaire, de vitesse et d'accélération de la phase et compléter les graphes pour 0 < t < 2.

2 - Etude de la deuxième phase.

Afin que la buse de dépôt d'ABS arrive précisément aux coordonnées voulues, l'axe x ralentit sur les 25 derniers millimètres.

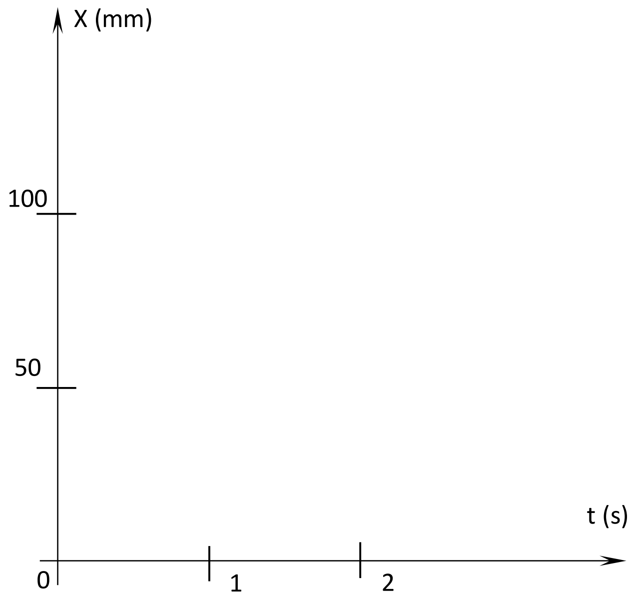
Question 5 - Déterminer le temps de cette phase.

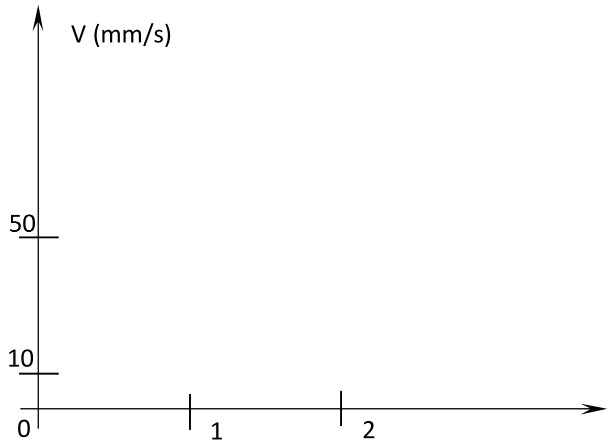
Question 6 - Ecrire les équations de la phase et compléter les graphes.

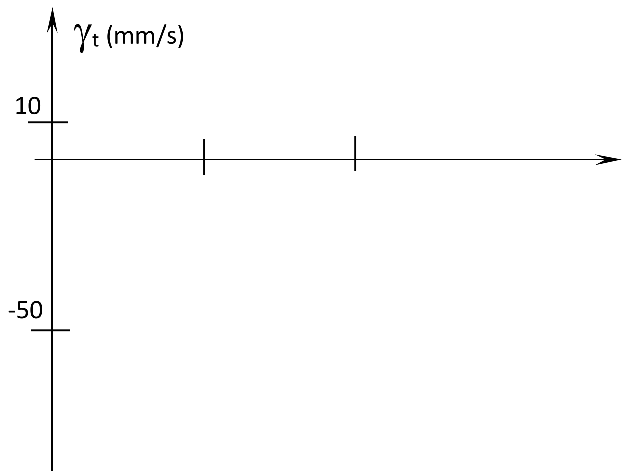
3- Etude de la troisième phase.

La machine reste immobile durant 0,5 seconde afin de déposer l'ABS fondu.

Question 7 - Ecrire les équations de la phase et compléter les graphes.







Vanne d'admission d'air

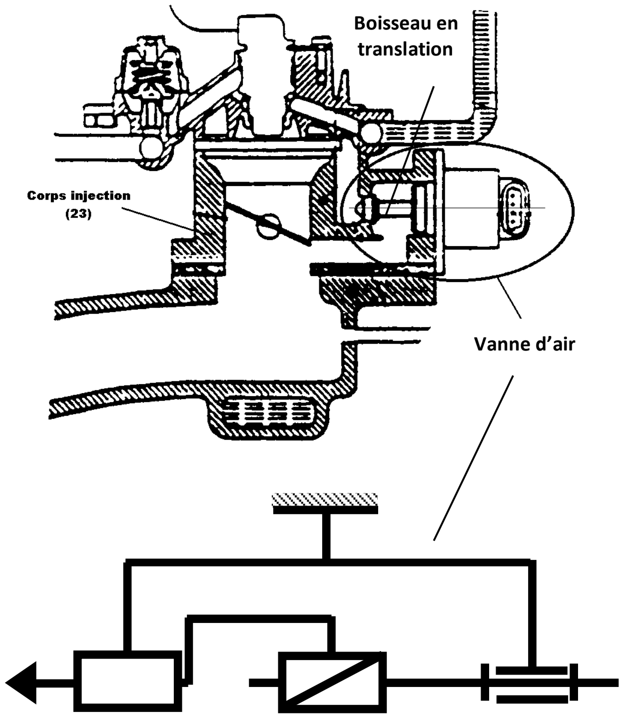
Dans un moteur à combustion, l'explosion est obtenue grâce à un mélange d'air et d'essence. La proportion d'air et d'essence dans ce mélange injecté dans la chambre de combustion varie en fonction de paramètres externes comme la température de l'air, la température et la vitesse de rotation du moteur.

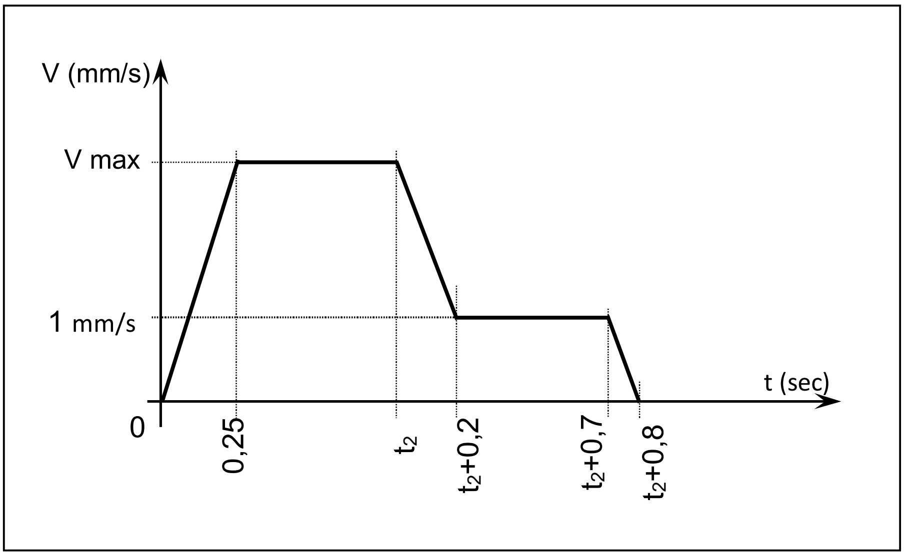
Une vanne additionnelle d'air permet de réguler le débit d'air entrant dans le moteur. La vanne d'air est commandée par le calculateur en fonction des éléments extérieurs.

Le système de transformation de mouvement est schématisé ci-contre. La rotation du moteur (liaison pivot) est transformée en translation du boisseau de fermeture par la glissière hélicoïdale dont le pas est de 0,5 mm. Le boisseau ouvre ou ferme le passage de l'air

Le moteur, alimenté par la partie commande, possède une vitesse de rotation maximum de 375 tr/min. Durant son utilisation et notamment au moment où il faut réduire les gaz imbrûlés lors de la décélération, la course maximum de fermeture du boisseau est de 3 mm.

Durant cette fermeture de 3 mm, le boisseau est régit par la loi de vitesse ci-dessous. Le mouvement total du boisseau de fermeture se décompose donc en 5 phases.





Le déplacement à vitesse maximum est suivi d'une vitesse ralentie à 1 mm/s durant 0,5 seconde pour éviter le choc mécanique du boisseau sur le bloc moteur.

Question 1 - Montrer, par le calcul, que la vitesse maximale du boisseau (V max) est de 3,125 mm/s.

Question 2 - Analyser la phase 1 et déterminer l'accélération et la distance parcourue durant cette phase.

Question 3 - Analyser la phase 3 et déterminer la décélération et la distance parcourue durant cette phase.

Question 4 - Analyser la phase 4 et déterminer la distance parcourue durant cette phase.

Question 5 - Analyser la phase 5 et déterminer la décélération et la distance parcourue durant cette phase.

Question 6 - Quelle est la distance parcourue par le boisseau durant la phase 2.

Question 7 - Quelle est la durée de la phase 2.

Question 8 - Calculer le temps total de déplacement du boisseau sur l'ensemble des 3 mm.

Automotrice à grande vitesse

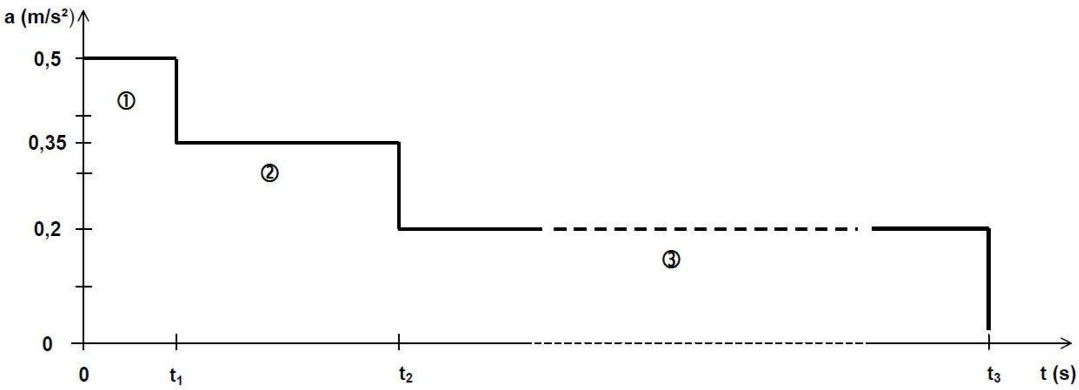
L'AGV (pour automotrice à grande vitesse) est un train à grande vitesse construit par Alstom. Successeur des TGV dont il reprend une caractéristique importante, il innove notamment par sa motorisation répartie le long de la rame contrairement aux TGV dont la motorisation est concentrée dans deux motrices situées aux extrémités de la rame. Ainsi il dispose de plus d'espace pour les voyageurs et sa masse est réduite.

Les étapes clefs du développement de l'AGV :

- *Juin 2004 :* lancement du programme de réalisation du prototype de l'AGV,
- *3 avril 2007 :* le TGV bat, avec les composants de l'AGV, un nouveau record du monde sur rail (574,8 km/h),
- *17 janvier 2008 :* Alstom et NTV (premier opérateur privé sur les lignes italiennes à grande vitesse) signent le premier contrat AGV,
- *5 février 2008 :* l'AGV est officiellement dévoilé à la presse,
- *Octobre 2010 :* livraison du premier exemplaire en Italie.

Objectifs : étudier les temps et les distances pour sortir de gare et passer de 0 à 360 km/h.

On admet que la sortie de gare s'effectue en 3 phases. Le mouvement retenu pour l'AGV est un mouvement de translation rectiligne caractérisé par l'allure du graphe d'accélération ci-dessous.



On précise également les vitesses atteintes aux différents instants :

$$V(0) = 0 \ ; \ V(t_1) = 36 \text{ km/h} \ ; \ V(t_2) = 144 \text{ km/h} \ ; \ V(t_3) = 360 \text{ km/h}$$

La **phase 1** est caractérisée par les équations horaires de mouvement :

$$\begin{cases} x(t) = 0{,}25.t^2 & \text{en m} \\ v(t) = 0{,}5.t & \text{en m/s} \\ a(t) = 0{,}5 & \text{en m/s}^2 \end{cases} \qquad \text{et pour } 0 \leq t \leq t_1$$

La **phase 2** est caractérisée par les équations horaires de mouvement de la forme :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}a_2.t^2 + v_{02}.t + x_{02} & \text{en m} \\ v(t) = a_2.t + v_{02} & \text{en m/s} \\ a(t) = a_2 = \text{constante} & \text{en m/s}^2 \end{cases} \qquad \text{et pour } t_1 \leq t \leq t_2$$

La **phase 3** dure 5 min et la distance parcourue pendant cette phase est de 21 km.

Question 1 - Tracer le diagramme des vitesses.

Question 2 - Déterminer la durée et la distance parcourue pendant la phase 1, soit t_1 et $x(t_1)$.

Question 3 - Déterminer pour la phase 2, les constantes v_{02}, x_{02} et t_2. Ecrire les équations horaires pour cette phase 2.

Question 4 - Déterminer le temps total en heure/minute/seconde pour atteindre la vitesse maximale désirée ainsi que la distance totale nécessaire en km, soit t_3 et $x(t_3)$.

5 - Caractéristiques du mouvement circulaire

Sur une trajectoire circulaire (mouvement de rotation), il est possible de repérer la position d'un point M de deux manières.

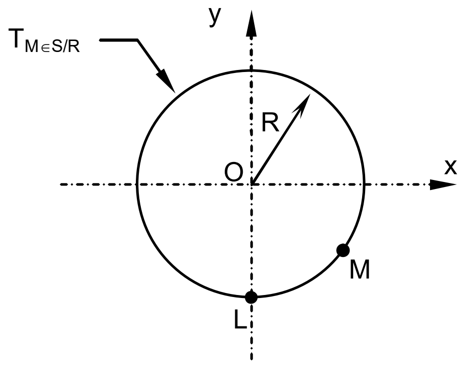
Repérage par l'abscisse curviligne

L'abscisse curviligne est la longueur d'arc parcourue sur la trajectoire circulaire (en mètres).

S = ARC LM   fonction du temps

Avec le point L position d'origine.

Dans ce cas :



-
-
-

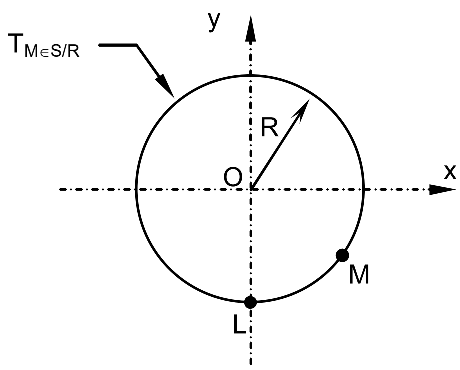
Repérage par l'abscisse angulaire

L'abscisse angulaire est l'angle parcourue sur la trajectoire circulaire (en radians).

θ = ANGLE (OL, OM)   fonction du temps

Avec le point L position d'origine.

Dans ce cas :



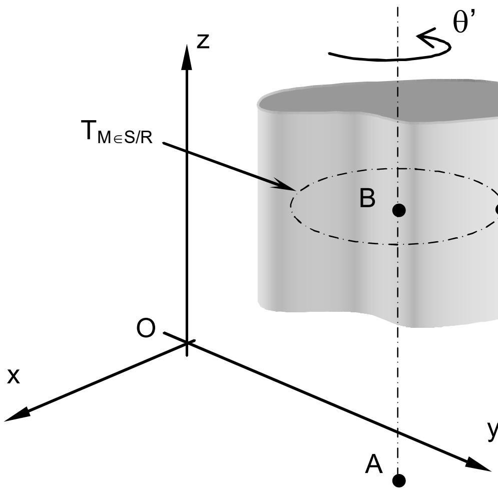
-
-

Relation entre abscisse curviligne et abscisse angulaire

6 - Mouvement Circulaire Uniforme (MCU)

Le solide S est en liaison pivot d'axe $(A,\vec{z})$.

Il y a mouvement donc $\theta' \neq 0$

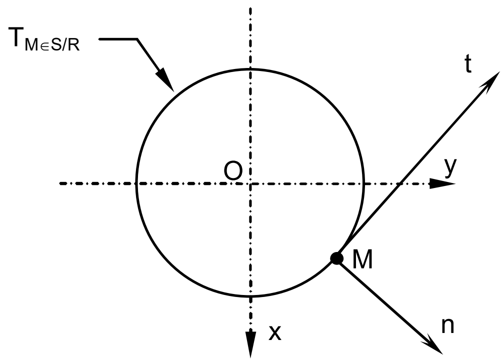


MCU si :

Caractéristiques :

Equation horaire (ou de l'abscisse angulaire)

Les vecteurs :

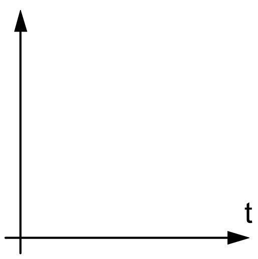


Vecteur vitesse : $\overrightarrow{V_{M \in S/R}} = R\theta'.\vec{t}$

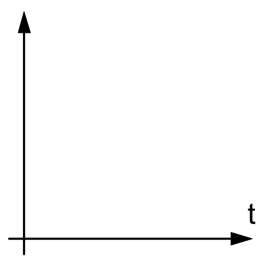
Vecteur accélération : $\overrightarrow{\Gamma_{M \in S/R}} = -R\theta'^2.\vec{n}$

Graphiquement :

Graphe de l'abscisse angulaire



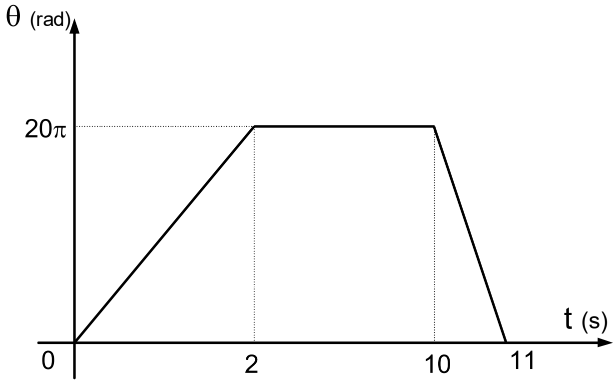
Graphe de la vitesse angulaire



Applications

Moteur électrique

Le mouvement de rotation d'un moteur électrique est caractérisé par le graphe de l'espace angulaire suivant :



Ce mouvement est décomposable en 3 phases.

- Phase 1 : 0 < t < 2.
- Phase 2 : 2 < t < 10.
- Phase 3 : 10 < t < 11.

Question 1.1 - Fonction de ce graphe, définir les équations caractérisant ce mouvement. Pour les phases 2 et 3, établir les équations en plaçant le repère en début de chaque phase puis par rapport au repère absolu.

Question 1.2 - Tracer le graphe des vitesses angulaires.

Transmission de puissance

La figure ci-dessous représente une partie de la transmission de puissance d'une machine.

Un élément de cette machine est un volant d'inertie (3). Le diamètre de ce volant est de 600 mm et tourne à une vitesse de 1650 tr/mn. L'arbre qui le supporte est entraîné par une transmission par courroie (supposée sans glissement). La poulie montée sur le moteur (1) possède un diamètre de 120 mm et la poulie réceptrice (2) un diamètre de 360 mm.

Question 2.1 - Déterminer la vitesse angulaire de l'arbre qui porte ce volant.

Question 2.2 - Calculer la vitesse linéaire d'un point M situé sur la périphérie du volant.

Question 2.3 - Quelle est l'accélération de ce point M.

Question 2.4 - Quelle est la vitesse angulaire du moteur.